

STRÖMUNGS MECHANIK

Ausfluss aus Behältern



Watch



Practice



Master

Hinweise

So nutzt du dieses Heft

Dieses Heft behandelt die instationäre Entleerung und den instationären Pegelausgleich von Behältern.

Die Aufgaben sind fachlich und didaktisch aufeinander abgestimmt und bauen in ihrem Schwierigkeitsgrad aufeinander auf. Die Bearbeitung in der vorgegebenen Reihenfolge wird daher empfohlen.

Alle für die Bearbeitung erforderlichen Konstanten, Stoffdaten und Formeln sind in der Formelsammlung aufgeführt.

So nutzt du die QR-Codes

Zu den Aufgaben werden fortlaufend ausführliche Lösungen auf YouTube veröffentlicht.

- **Auf dem Papier:** Scanne den QR-Code, um das jeweilige Video aufzurufen.
- **Digital:** Klicke auf den QR-Code, um das jeweilige Video aufzurufen.

Die Videos können sowohl begleitend zur Bearbeitung als auch zur Nachbereitung und Vertiefung genutzt werden.

Hier geht's zur Playlist auf YouTube



Engineering | With Erwin (DE)

Dieses Lehrmaterial wurde unabhängig erstellt und steht in keiner Verbindung zu Hochschulen, Prüfungsorganisationen oder anderen offiziellen Institutionen.

Trotz sorgfältiger Erstellung wird keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der Inhalte übernommen.

Inhalt

Hinweise	I
So nutzt du dieses Heft	I
So nutzt du die QR-Codes.....	I
Formelzeichen.....	III
Lateinische Formelzeichen	III
Griechische Formelzeichen.....	III
Indizes.....	III
Formelsammlung.....	IV
Konstanten.....	IV
Stoffdaten	IV
Formeln.....	IV
Trigonometrische Beziehungen.....	IV
Aufgaben.....	1
Aufgabe 1 – Stationärer Ausfluss aus Behälter.....	1
Aufgabe 2 – Instationärer Ausfluss aus Behälter mit konstanter Querschnittsfläche.....	2
Aufgabe 3 – Instationärer Ausfluss bis zu vorgegebener Wasserhöhe	3
Aufgabe 4 – Instationärer Ausfluss aus Behälter mit Wasserzufluss	4
Aufgabe 5 – Instationärer Ausfluss aus Kegelbehälter.....	5
Aufgabe 6 – Instationärer Ausfluss aus waagrechtem Zylinderbehälter	6
Aufgabe 7 – Instationärer Ausfluss aus Kugelbehälter	7
Aufgabe 8 – Instationärer Pegelausgleich bei sehr großem Ober- und Unterwasser	8
Aufgabe 9 – Instationärer Pegelausgleich zwischen kommunizierenden Behältern	9
Ergebnisse.....	10
Aufgabe 1 – Stationärer Ausfluss aus Behälter.....	10
Aufgabe 2 – Instationärer Ausfluss aus Behälter mit konstanter Querschnittsfläche.....	10
Aufgabe 3 – Instationärer Ausfluss bis zu vorgegebener Wasserhöhe	10
Aufgabe 4 – Instationärer Ausfluss aus Behälter mit Wasserzufluss	10
Aufgabe 5 – Instationärer Ausfluss aus Kegelbehälter.....	10
Aufgabe 6 – Instationärer Ausfluss aus waagrechtem Zylinderbehälter	10
Aufgabe 7 – Instationärer Ausfluss aus Kugelbehälter	11
Aufgabe 8 – Instationärer Pegelausgleich bei sehr großem Ober- und Unterwasser	11
Aufgabe 9 – Instationärer Pegelausgleich zwischen kommunizierenden Behältern	11

Formelzeichen

Lateinische Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
A	m^2	Fläche, Querschnittsfläche
b	m	Breite
c	m s^{-1}	Geschwindigkeit
d, D	m	Durchmesser
g	m s^{-2}	Fallbeschleunigung
h, H	m	Höhe
m	kg	Masse
$\dot{m}$	kg s^{-1}	Massenstrom
p	Pa, bar	Druck
r, R	m	Radius
t	s	Zeit
V	m^3	Volumen
$\dot{V}$	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$	Volumenstrom
x, y, z	m	Raumkoordinaten

Griechische Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
Δ	–	Differenz
μ	–	Ausflusszahl
π	–	Kreiszahl
ρ	kg m^{-3}	Dichte

Indizes

Symbol	Bedeutung
∞	Umgebung
1, 2, 3, ...	Zustand
a	am Auslass
aus	austretend
ein	eintretend
ideal	idealisiert, verlustfrei
real	real, verlustbehaftet
w	Wasser

Formelsammlung

Konstanten

Fallbeschleunigung	$g = 9,81$	m s^{-2}
Kreiszahl	$\pi = 3,1416$	–

Stoffdaten

Dichte von Wasser	$\rho_w = 10^3$	kg m^{-3}
-------------------	-----------------	--------------------

Hinweis: Die angegebenen Konstanten und Stoffdaten stellen vereinfachte Näherungen dar. Sofern nicht anders angegeben, sind die aufgeführten Werte für alle Aufgaben zu verwenden.

Formeln

Bernoulli-Gleichung (Druckform)	$p + \rho \cdot \frac{c^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h = \text{konst.}$
Ausflusszahl	$\mu = \frac{c_{\text{real}}}{c_{\text{ideal}}}$
Massenbilanz	$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{\text{ein}} - \dot{m}_{\text{aus}}$
Masse	$m = \rho \cdot V$
Massenstrom	$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V}$
Volumenstrom	$\dot{V} = A \cdot c$
Durchmesser	$d = 2 \cdot r$
Kreisfläche	$A_{\text{kreis}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$
Kegelvolumen	$V_{\text{kegel}} = A_{\text{kreis}} \cdot \frac{h}{3}$
Zylindervolumen	$V_{\text{zylinder}} = A_{\text{kreis}} \cdot b$
Kugelvolumen	$V_{\text{kugel}} = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$

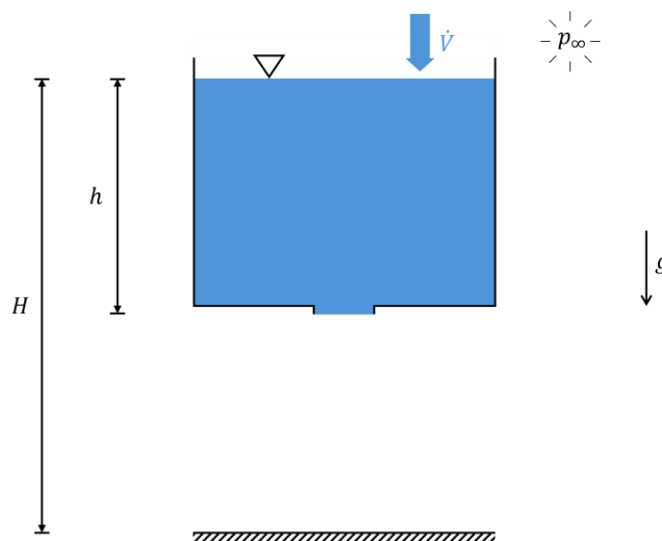
Trigonometrische Beziehungen

$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$	$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$	$a^2 = b^2 + c^2$

Aufgaben

Aufgabe 1 – Stationärer Ausfluss aus Behälter

Ein großer, offener Wasserbehälter besitzt am Boden eine kreisförmige Austrittsöffnung mit dem Durchmesser $d_a = 10$ cm. Durch einen Zufluss bleibt der Wasserstand konstant. Zu Beginn beträgt der Höhenunterschied zwischen Wasserspiegel und Austrittsöffnung $h = 4$ m, der Abstand zwischen Wasserspiegel und Boden $H = 9$ m. Der Strömungsvorgang kann zunächst idealisiert betrachtet werden.



- Berechnen Sie durch Anwendung der Bernoulli-Gleichung die ideale Austrittsgeschwindigkeit.
- Unter Berücksichtigung der Ausflusszahl μ ergibt sich die tatsächliche Austrittsgeschwindigkeit. Berechnen Sie diese für $\mu = 0,8$.
- Berechnen Sie den Volumenstrom $\dot{V}$, der erforderlich ist, damit der Wasserstand konstant bleibt.
- Berechnen Sie die Auftreffgeschwindigkeit des Wasserstrahls auf dem Boden. Der Luftwiderstand kann vernachlässigt werden.
- Skizzieren Sie den Wasserstrahl qualitativ und physikalisch konsistent in die Abbildung.

Aufgabe 2 – Instationärer Ausfluss aus Behälter mit konstanter Querschnittsfläche

Ein großer, offener Wasserbehälter besitzt die konstante Querschnittsfläche $A = 9 \text{ m}^2$.

Am Boden befindet sich ein Auslass mit der Fläche $A_a = 0,2 \text{ m}^2$. Zu Beginn ist der Auslass geschlossen. Der Höhenunterschied zwischen Wasserspiegel und Auslass beträgt zunächst $h_1 = 5 \text{ m}$. Nach dem Öffnen des Auslasses sinkt der Wasserstand instationär ab.

Gegeben: $\mu = 0,8$

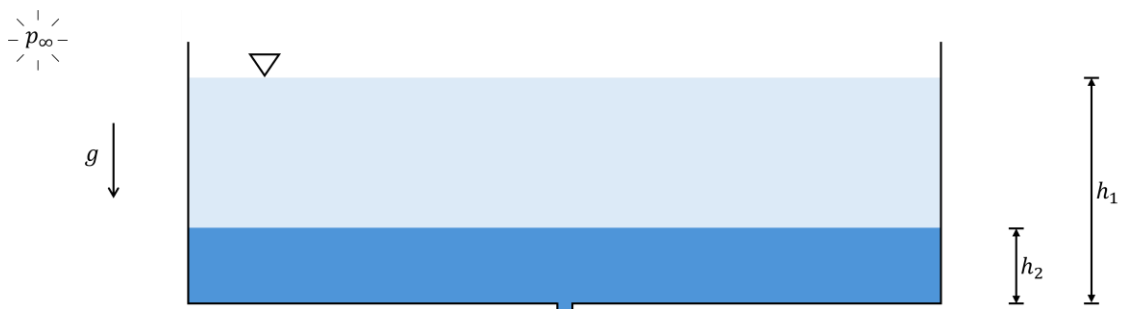


- Berechnen Sie die Ausflussgeschwindigkeit $c(h)$ in Abhängigkeit der Wasserhöhe h .
- Stellen Sie unter Anwendung des Massenerhaltungssatzes die Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf der Wasserhöhe $h(t)$ auf und formen Sie diese mittels Trennung der Variablen in die Form $dt = f(h) dh$ um.
- Berechnen Sie die Zeit, die benötigt wird, bis der Behälter vollständig entleert ist.
- Stellen Sie den Verlauf der Ausflussgeschwindigkeit $c(t)$ qualitativ über der Zeit dar.

Aufgabe 3 – Instationärer Ausfluss bis zu vorgegebener Wasserhöhe

Ein großer, offener Wasserbehälter besitzt die konstante Querschnittsfläche $A = 6 \text{ m}^2$. Am Boden befindet sich ein Auslass mit der Fläche $A_a = 0,12 \text{ m}^2$. Zu Beginn beträgt der Höhenunterschied zwischen Wasserspiegel und Auslass $h_1 = 8 \text{ m}$. Nach dem Öffnen des Auslasses sinkt der Wasserstand instationär ab.

Gegeben: $\mu = 0,82$

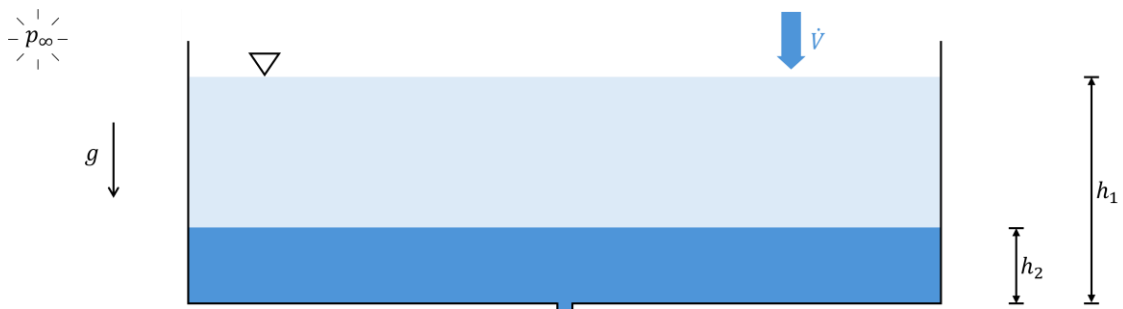


- Berechnen Sie die Zeit, die benötigt wird, bis der Wasserstand die Höhe $h_2 = 2 \text{ m}$ erreicht.
- Berechnen Sie die Wasserhöhe nach 20 Sekunden.

Aufgabe 4 – Instationärer Ausfluss aus Behälter mit Wasserzufluss

Ein großer, offener Wasserbehälter besitzt die konstante Querschnittsfläche $A = 12 \text{ m}^2$. Am Boden befindet sich ein Auslass mit der Fläche $A_a = 0,2 \text{ m}^2$. Zu Beginn beträgt der Höhenunterschied zwischen Wasserspiegel und Auslass $h_1 = 12 \text{ m}$. Nach dem Öffnen des Auslasses sinkt der Wasserstand instationär ab. Gleichzeitig strömt Wasser mit dem konstanten Volumenstrom $\dot{V} = 1,5 \text{ m}^3/\text{s}$ in den Behälter.

Gegeben: $\mu = 0,9$



- Berechnen Sie die Wasserhöhe h , bei der sich ein stationärer Zustand einstellt.
- Berechnen Sie die Zeit, die benötigt wird, bis der Wasserstand die Höhe $h_2 = 6 \text{ m}$ erreicht.

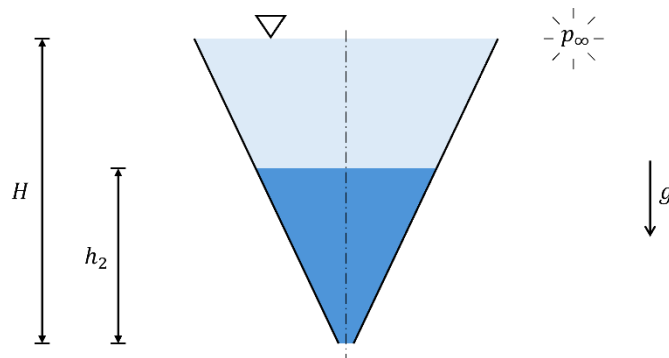
Hinweis:

$$\int \frac{u}{au + b} du = \frac{u}{a} - \frac{b}{a^2} \ln|au + b|$$

Aufgabe 5 – Instationärer Ausfluss aus Kegelbehälter

Ein großer, offener Wasserbehälter besitzt die Form eines achsensymmetrischen geraden Kreiskegels. Am tiefsten Punkt des Behälters befindet sich eine kreisförmige Austrittsöffnung mit dem Durchmesser $d_a = 5$ cm. Zu Beginn ist der Behälter vollständig mit Wasser gefüllt $h_1 = H = 2$ m. Der obere Behälterdurchmesser beträgt $D = 1$ m. Nach dem Öffnen des Auslasses sinkt der Wasserstand instationär ab. Für den Durchmesser des Wasserspiegels gilt $d(t) = D \cdot \frac{h(t)}{H}$.

Gegeben: $\mu = 0,84$

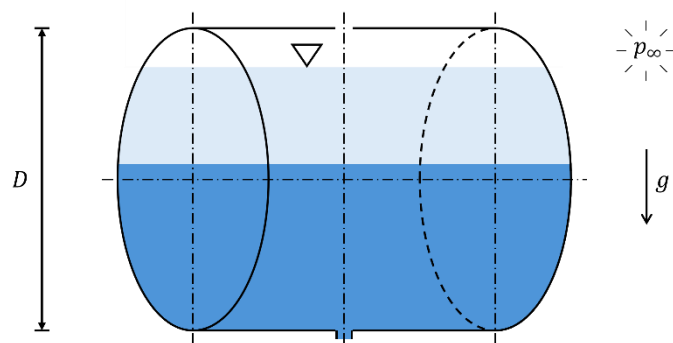


- Berechnen Sie die Zeit, die benötigt wird, bis der Wasserbehälter vollständig entleert ist.
- Berechnen Sie die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers nach 30 s.
- Im Rahmen der Modellbildung wurde die Behältergeometrie vereinfacht. Erläutern Sie diese Vereinfachung und beurteilen Sie deren Einfluss auf das Ergebnis aus a).

Aufgabe 6 – Instationärer Ausfluss aus waagrechtem Zylinderbehälter

Ein großer, offener Wasserbehälter besitzt die Form eines waagrecht liegenden Kreiszylinders. Am tiefsten Punkt des Behälters befindet sich eine kreisförmige Austrittsöffnung mit dem Durchmesser $d_a = 12$ cm. Der Behälterdurchmesser beträgt $D = 4$ m. Die Zylinderbreite beträgt $b = 6$ m. Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe $h_1 = 3,25$ m. Nach dem Öffnen des Auslasses sinkt der Wasserstand instationär ab.

Gegeben: $\mu = 0,8$

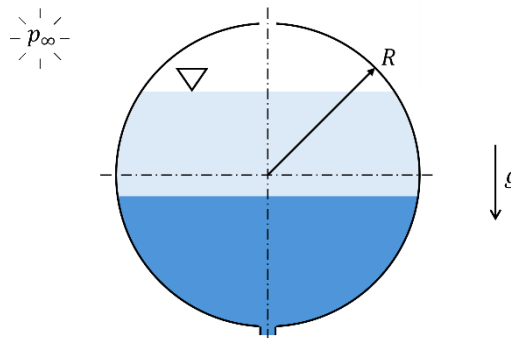


- Leiten Sie die Querschnittsfläche des Wasserspiegels $A(h)$ in Abhängigkeit von der Wasserhöhe h her.
- Berechnen Sie die Zeit t , die benötigt wird, bis der Wasserstand die Höhe $h_2 = 1$ m erreicht.

Aufgabe 7 – Instationärer Ausfluss aus Kugelbehälter

Ein großer, kugelförmiger Tank besitzt am tiefsten Punkt eine kreisförmige Austrittsöffnung mit dem Durchmesser $d_a = 14$ cm. Der Kugelradius beträgt $R = 3$ m. Zu Beginn beträgt die Wasserhöhe $h_1 = \frac{3}{2}R$. Nach dem Öffnen des Auslasses sinkt der Wasserstand instationär ab.

Gegeben: $\mu = 0,86$

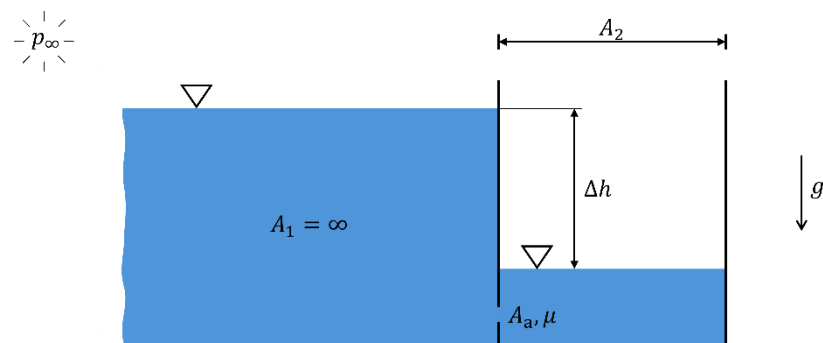


- a) Berechnen Sie die Zeit t , die benötigt wird, bis der Wasserstand die Höhe $h_2 = \frac{1}{2}R$ erreicht.

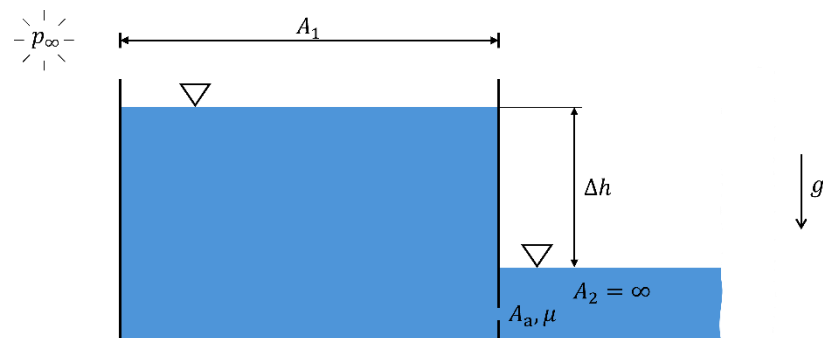
Aufgabe 8 – Instationärer Pegelausgleich bei sehr großem Ober- und Unterwasser

Ein sehr großes Oberwasser speist über eine Verbindungsöffnung ein Becken. Die Querschnittsfläche des Beckens beträgt A_2 . Die Verbindungsöffnung besitzt die Querschnittsfläche A_a .

Zu Beginn beträgt der Höhenunterschied zwischen den beiden Wasserspiegeln H . Nach dem Öffnen der Verbindungsöffnung strömt Wasser vom Oberwasser in das Becken. Dabei stellt sich ein instationärer Pegelausgleich ein, bis beide Wasserspiegel dieselbe Höhe erreicht haben.



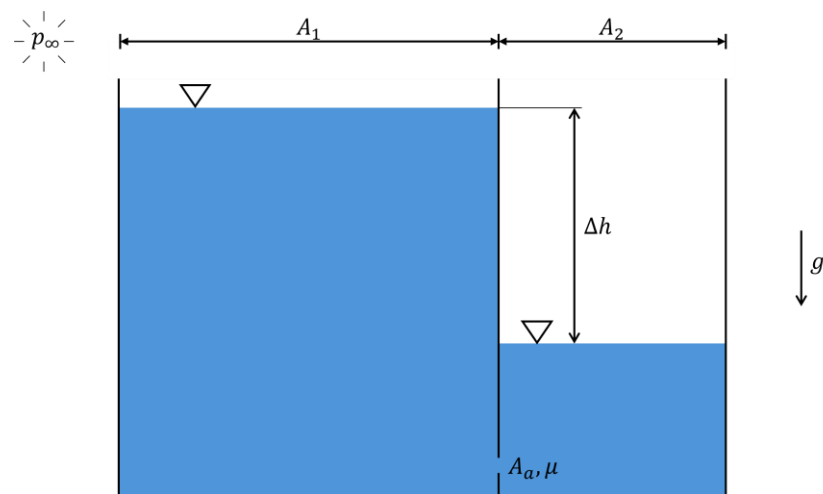
- Leiten Sie eine allgemeine Funktion $t = f(H)$ für die Zeit bis zum vollständigen Pegelausgleich her.
- Berechnen Sie die Zeit t bis zum vollständigen Pegelausgleich für:
 $A_1 = \infty, A_2 = 1250 \text{ m}^2, A_a = 0,03 \text{ m}^2, H = 3,5 \text{ m}, \mu = 0,87$
- Berechnen Sie für den umgekehrten Fall, bei dem das Becken in ein sehr großes Unterwasser entleert wird, den Höhenunterschied Δh nach 3 Stunden.
 $A_1 = 1250 \text{ m}^2, A_2 = \infty$



Aufgabe 9 – Instationärer Pegelausgleich zwischen kommunizierenden Behältern

Zwei große, nach oben offene Behälter sind durch eine gemeinsame Öffnung miteinander verbunden. Die Querschnittsflächen der Behälter betragen A_1 und A_2 . Die Verbindungsöffnung besitzt die Querschnittsfläche A_a .

Zu Beginn beträgt der Höhenunterschied zwischen den beiden Wasserspiegeln H . Nach dem Öffnen der Verbindungsöffnung strömt Wasser vom linken in den rechten Behälter. Dabei stellt sich ein instationärer Pegelausgleich ein, bis beide Wasserspiegel dieselbe Höhe erreicht haben.



- Leiten Sie eine allgemeine Funktion $t = f(H)$ für die Zeit bis zum vollständigen Pegelausgleich her.
- Berechnen Sie die Zeit t bis zum vollständigen Pegelausgleich für:
 $A_1 = 25 \text{ m}^2, A_2 = 10 \text{ m}^2, A_a = 0,01 \text{ m}^2, H = 6 \text{ m}, \mu = 0,8$
- Berechnen Sie den Höhenunterschied Δh 5 min nach dem Öffnen der Verbindungsöffnung.

Ergebnisse

Aufgabe 1 – Stationärer Ausfluss aus Behälter

- a) $c_{1,\text{ideal}} = 8,8589 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- b) $c_{1,\text{real}} = 7,0871 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- c) $\dot{V} = 0,0557 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
- d) $c_{2,\text{real}} = 12,179 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- e) Siehe Video

Aufgabe 2 – Instationärer Ausfluss aus Behälter mit konstanter Querschnittsfläche

- a) $c(h) = \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$
- b) $dt = - \frac{A}{\mu \cdot A_a \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} dh$
- c) $t(h = 0) = 56,7821 \text{ s}$
- d) Siehe Video

Aufgabe 3 – Instationärer Ausfluss bis zu vorgegebener Wasserhöhe

- a) $t(h = 2 \text{ m}) = 38,936 \text{ s}$
- b) $h(t = 20 \text{ s}) = 4,4184 \text{ m}$

Aufgabe 4 – Instationärer Ausfluss aus Behälter mit Wasserzufluss

- a) $h = 3,5395 \text{ m}$
- b) $t(h_2 = 6 \text{ m}) = 88,5606 \text{ s}$

Aufgabe 5 – Instationärer Ausfluss aus Kegelbehälter

- a) $t(h = 0) = 60,8144 \text{ s}$
- b) $c(t = 30 \text{ s}) = 4,593 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- c) Siehe Video

Aufgabe 6 – Instationärer Ausfluss aus waagrechtem Zylinderbehälter

- a) $A(h) = 2 \cdot \sqrt{(2R - h)h} \cdot b$
- b) $t(h_2 = 1 \text{ m}) = 907,5866 \text{ s}$

Aufgabe 7 – Instationärer Ausfluss aus Kugelbehälter

a) $t(h_2 = \frac{1}{2}R) = 790,481 \text{ s}$

Aufgabe 8 – Instationärer Pegelausgleich bei sehr großem Ober- und Unterwasser

a) $t = \frac{A_2}{\mu \cdot A_a} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$

b) $t(\Delta h_2 = 0) = 40456,1001 \text{ s}$

c) $\Delta h(t = 3 \text{ h}) = 1,8807 \text{ m}$

Aufgabe 9 – Instationärer Pegelausgleich zwischen kommunizierenden Behältern

a) $t = \frac{A_1 \cdot A_2}{\mu \cdot A_a \cdot (A_1 + A_2)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$

b) $t(\Delta h_2 = 0) = 987,5023 \text{ s}$

c) $\Delta h(t = 5 \text{ min}) = 2,9082 \text{ m}$

Hier geht's zu den ausführlichen Lösungen auf YouTube



Du hast einen Fehler gefunden oder eine Idee für eine neue Aufgabe?

Schreibe gerne an: feedback@witherwin.com



Engineering | With Erwin (DE)

Watch. Practice. Master.

YouTube – Ausführliche Lösungen und Erklärungen

Downloads – Weitere Lernmaterialien und Übungshefte

www.witherwin.com